多値AND, OR, NOT, 定数, 変数によって表現される多値論理関数の必要十分条件とその論理式決定(多値論理及びその応用(4))

大和, 一晴; 中島, 恭一; 畑, 豊; 佐藤, 隆志

数理解析研究所講究録
687巻 1989年 124-144

多値ＡＮＤ，ＯＲ，ＮＯＴ，定数，変数によって表現される多値論理関数の必要十分条件とその論理式決定

姫路工業大学　大和　一晴（Kazuharu YAMATO）中島　恭一（Kyoichi NAKASHIMA）
畑　　豊　（Yutaka HATA）佐藤　隆志（Takashi SATO）

１．まえがき

多値論理関数が通常の２値論理関数に比べて取り扱いが難しくなる原因の一つに，真理値の個数が値数の増大に対して指数的に増加することが挙げられる．我々は，これに対して多値論理関数をより簡単に取り扱うことのできる２値入力ｐ値出力関数[1]（（２，ｐ）－関数）を定義し，これを用いてある種の論理関数を解析してきた．その結果，単調な（２，ｐ）－関数によって多値多数決関数[2]とユネイト関数[3]の論理式が決定でき，多値多数決関数に対してはその構造も決定できることを明らかにした．また，非単調な（２，ｐ）－関数からはｐ値のＡＮＤ，ＯＲ，ＮＯＴ，定数，及び変数によって表現できるｐ値論理関数（以後，これを論理式表現されたｐ値論理関数と言う）の一部が解析できた．

本文では，論理式表現されるｐ値論理関数全体を取り扱うために，（２，ｐ）－関数の拡張として，入力値数を一つ増やした３値入力ｐ値出力関数（（３，ｐ）－関数）を導入し解析を行った．まず，（３，ｐ）－関数に$0 \Rightarrow 1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \frac{p-1}{2}$，$p-1 \Rightarrow p-2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \frac{p-1}{2}$なる順序関係を定義した．この順序関係に対する単調性を満足する

（３，ｐ）－関数をＣ－単調な（３，ｐ）－関数と呼ぶことにした．この関数によって次の事実を明らかにした．

①Ｃ－単調な（３，ｐ）－関数と論理式表現されるｐ値論理関数の集合は全単射の関係にある．　②Ｃ－単調な（３，ｐ）－関数は，正則３値論理関数[4]の理論を適用して論理式決定ができる．

③論理式表現されるｐ値論理関数の論理式はＣ－単調な（３，ｐ）－関数の論理式の単なる変数変換により決定できる．

以上の事実により，ｐ値論理関数Fが論理式表現されるｐ値論理関数であるための必要十分条件は，すべてのｐ値ベクトル$A_i(X_i)$に対して$F(A_i(X_i))=r(X_i\overline{X_i}\vee st)\vee tX_i\vee s\overline{X_i}$を満足することであると導けた．この結果，論理式表現されるｐ値論理関数すべてが，この（３，ｐ）－関数により解析できた．

２．基本定義と関数の論理式表現

真理値集合$V=\{0,1,2,\cdots,p-1\}$とし，入力ベクトル$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$の各変数がｐ値論理変数で，写像$V^n\to V^1$であるｎ変数ｐ値論理関数$F(X)$を定義する．p値論理関数$F(X)$は，単にｐ値関数$F(X)$またはFと記されることがある．

ａ，ｂ∈Ｖに対し，論理和∨，論理積・，否定￣の各演算子は次のように定義する．

$$a\vee b=\max(a,b),\qquad a\cdot b=\min(a,b)$$

$$\overline{a}=p-1-a$$

・はしばしば省略され，記法・，∨，￣，はそれぞれＡＮＤ，ＯＲ，ＮＯＴと言わ

れる．

p値論理関数F(X)が，ＡＮＤ，ＯＲ，ＮＯＴ，変数X_i及びp値定数0,1,2,…p-1のみを使って書かれるとき，F(X)は論理式で表現されると言う．

二つの関数F，Gに対して，記法$F \subseteq G$は，$F(X)=t$としたとき常に$G(X) \geqq t$が成り立つことを意味する．もし，$F \subseteq G$かつ$G \supseteq F$ならば，FとGは等しいといい,$F=G$と書く．記法$F \subset G$は$F \subseteq G$かつあるベクトルYに対して$F(Y)<G(Y)$であることを意味する．

ここで，p値論理関数F(X)が，論理式で表現されるときの性質を次に与える．

［定理１］　p値入力ベクトル$A_i(X_i)=(a_1,\cdots,a_{i-1},X_i,a_{i+1},\cdots,a_n)$とし，$(a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n)$を固定したベクトルと見なす．p値関数F(X)が論理式で表現されているとき，任意のp値ベクトル$A_i(X_i)$に対し次の関係式をもつ．

$$F(A_i(X_i))=r(X_i\overline{X_i} \vee st) \vee tX_i \vee s\overline{X_i} \qquad (1)$$

但し，$r=F(A_i(\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor))$，$s=F(A_i(0))$，$t=F(A_i(p-1))$とする．$\lfloor x \rfloor$は，xを越えない最大整数とする．

（証明）　論理式で表現されているp値論理関数F(X)は，次の関係を満足する．

$$F(A_i(X_i))=aX_i\overline{X_i} \vee bX_i \vee c\overline{X_i} \vee d \qquad (a,b,c,d \in \{0,1,\cdots,p-1\}) \qquad (2)$$

(2)式に$X_i=0,\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor,p-1$を代入し，それぞれをs,t,rとする．

$$F(A_i(0))=c \vee d=s,\quad F(A_i(p-1))=b \vee d=t.$$

$p=2m(m=2,3,\cdots)$の場合，

$$F(A_i(\lfloor\tfrac{p-1}{2}\rfloor))=(a \vee b)\lfloor\tfrac{p-1}{2}\rfloor \vee c(\lfloor\tfrac{p-1}{2}\rfloor+1) \vee d=r$$

$p=2m-1(m=2,3,\cdots)$の場合，

$$F(A_i(\tfrac{p-1}{2}))=(a \vee b \vee c)\tfrac{p-1}{2} \vee d=r$$

これらの値を(1)式に代入したとき，(2)式と等価であることを証明する.

$p=2m(m=2,3,\cdots)$のとき，

$$\{(a\vee b)\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor\vee c\left(\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1\right)\vee d\}\{X_i\overline{X_i}\vee(c\vee d)(b\vee d)\}\vee(b\vee d)X_i\vee(c\vee d)\overline{X_i}$$

$$=\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor aX_i\overline{X_i}\vee bX_i\vee c\overline{X_i}\vee bc\left(\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1\right)\vee(a\vee b)(cb\vee d)\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor\vee d$$

$$=\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor aX_i\overline{X_i}\vee bX_i\vee c\overline{X_i}\vee bc\left(\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1\right)\vee d \tag{3}$$

$p=2m-1(m=2,3,\cdots)$のとき，

$$\{(a\vee b\vee c)\frac{p-1}{2}\vee d\}\{X_i\overline{X_i}\vee(c\vee d)(b\vee d)\}\vee(b\vee d)X_i\vee(c\vee d)\overline{X_i}$$

$$=\frac{p-1}{2}aX_i\overline{X_i}\vee bX_i\vee c\overline{X_i}\vee\frac{p-1}{2}(a\vee b\vee c)bc\vee d$$

$$=\frac{p-1}{2}aX_i\overline{X_i}\vee bX_i\vee c\overline{X_i}\vee bc\frac{p-1}{2}\vee d \tag{4}$$

ここで，(3)，(4)式が(2)式と等価であることを証明する.

$X_i\overline{X_i}\subseteq\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor$であるので，$aX_i\overline{X_i}=\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor aX_i\overline{X_i}$.

定数項については次の関係が成り立つ.

(i)　$p=2m(m=2,3,\cdots)$のとき，

$b,c\geqq\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1$のとき，$bX_i\vee c\overline{X_i}\supset\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1\supset bc\left(\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1\right)$

$b,c\leqq\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor$　のとき，$bX_i\vee c\overline{X_i}\supset bc\supset bc\left(\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1\right)$

$b\geqq\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1>c$のとき，$bX_i\vee c\overline{X_i}\supset c(X_i\vee\overline{X_i})\supset c\supset bc\left(\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1\right)$

$c\geqq\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1>b$のとき，$bX_i\vee c\overline{X_i}\supset b(X_i\vee\overline{X_i})\supset b\supset bc\left(\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor+1\right)$

(ii)　$p=2m-1(m=2,3,\cdots)$のとき，

$b,c\geqq\frac{p-1}{2}$のとき，　$bX_i\vee c\overline{X_i}\supset\frac{p-1}{2}\supset bc\frac{p-1}{2}$

$b,c\leqq\frac{p-1}{2}$のとき，　$bX_i\vee c\overline{X_i}\supset bc\supset bc\frac{p-1}{2}$

$b\geqq\frac{p-1}{2}>c$のとき，$bX_i\vee c\overline{X_i}\supset c(X_i\vee\overline{X_i})\supset c\supset bc\left(\frac{p-1}{2}\right)$

$c\geqq\frac{p-1}{2}>b$のとき，$bX_i\vee c\overline{X_i}\supset b(X_i\vee\overline{X_i})\supset b\supset bc\left(\frac{p-1}{2}\right)$

（i），（ii）より $bc(\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1)$，または $bc^{\frac{p-1}{2}}$ は，項 $bX_i \vee c\overline{X}_i$ に吸収される． 従って(3),(4)式は(2)式と等価である．　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

次に，全てのp値入力ベクトル $A_i(X_i)$ に対し，(1)式の関係が成立する関数は，論理式で表現されるか否かを考える．そのために３．以下の議論をする．

３． ３値入力多値出力関数とその性質

真理値集合 $T=\{0,\frac{p-1}{2},p-1\}$ とする．$p=2m-1(m=2,3,\cdots)$ に対しては写像 $T^n\rightarrow V^1$ であるn変数３値入力p値出力関数fを定義する．一方，$p=2m(m=2,3,\cdots)$ に対しては新しい真理値集合 $V'=\{0,\cdots,\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor,\frac{p-1}{2},\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1,\cdots,p-1\}$ とし（このとき $\frac{p-1}{2}$ は整数ではない），写像 $T^n\rightarrow V'^1$ である３値入力p+1値出力関数f'を定義する．ここでは，f,f'をまとめて簡単に(3,p)-関数 $f(x)$ と記す．但し，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in T^n$ は入力ベクトルである．

次に，半順序関係"⇒"を定義する．

［定義１］　V（またはV'）上で半順序関係"⇒"を次のように定義する．

①　$0\Rightarrow1\Rightarrow\cdots\Rightarrow\frac{p-1}{2}$，　$p-1\Rightarrow p-2\Rightarrow\cdots\Rightarrow\frac{p-1}{2}$

また，T上でも半順序関係を次のように定義する．

②　$0\Rightarrow\frac{p-1}{2}$，　$p-1\Rightarrow\frac{p-1}{2}$

さらに，二つの異なるベクトル $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)(x,y\in T^n)$ において，すべてのｉに対して $x_i\Rightarrow y_i$ が成り立つとき $x\Rightarrow y$ と記す．もし，$x\Rightarrow y$ あるいは $y\Rightarrow x$ が成り立つとき x と y は比較可能であるといい，そうでないとき比較不能であるという．

[定義２]　(3,p)-関数f(x)が次の条件を満たすときf(x)はC-単調であるという．

$x \Rightarrow y$ ならば $f(x) \Rightarrow f(y)$

C-単調は3値論理関数における正則性[4]の１つの拡張になっている．

(3,p)-関数f(x)が３値変数$x_1, x_2, \cdots, x_n$，定数$0, 1, \cdots, \frac{p-1}{2}, \cdots, p-1$及び論理演算子ＡＮＤ，ＯＲ，ＮＯＴから構成されるとき，f(x)は論理式で表現されるという．

ここで,C-単調な(3,p)-関数は論理式で表現されるかどうかを考える．

まず,(3,p)-関数を$p=2m-1$の場合は$p-1$個の３値論理関数に，また$p=2m$の場合はp個の３値論理関数に分離し，それらの３値論理関数が論理式で表現される(すなわち正則３値論理関数となる）ことを示す．最終的にC-単調な(3,p)-関数が論理式表現されることを示す．

次のような３値関数$f_k{}^3(x):\{0, \frac{p-1}{2}, p-1\}^n \to \{0, \frac{p-1}{2}, p-1\}^1 (k=1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2}, \cdots, p-1)$をＣ－単調な(3,p)-関数f(x)から導出する．

(i)　$0<k<\frac{p-1}{2}$ の場合

$$f_k{}^3(x)=\begin{cases} 0 & f(x) \leqq k-1 \ (f(x) \Rightarrow k-1) \text{のとき} \\ \frac{p-1}{2} & \text{その他のとき} \end{cases}$$

(ii)　$k=\frac{p-1}{2}$ の場合

$p=2m$のとき

$$f_k{}^3(x)=\begin{cases} 0 & f(x) \leqq \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor \ (f(x) \Rightarrow \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor) \text{のとき} \\ \frac{p-1}{2} & \text{その他のとき} \end{cases}$$

$p=2m-1$のとき

$$f_k^3(x)=\begin{cases} 0 & f(x)\leqq \frac{p-1}{2}-1\ (f(x)\Rrightarrow \frac{p-1}{2}-1)\text{のとき} \\ \frac{p-1}{2} & \text{その他のとき} \end{cases}$$

(iii) $\frac{p-1}{2}<k\leqq p-1$の場合

$$f_k^3(x)=\begin{cases} 0 & f(x)<\frac{p-1}{2}\quad\text{のとき} \\ \frac{p-1}{2} & \frac{p-1}{2}\leqq f(x)<k\quad\text{のとき} \\ p-1 & f(x)\geqq k(f(x)\Rrightarrow k)\ \text{のとき} \end{cases}$$

ここで示された３値関数$f_k^3(x)$は，写像：$\{0,\frac{p-1}{2},p-1\}^n\to\{0,\frac{p-1}{2},p-1\}^1$の関数である．この３値関数$f_k^3(x)$は半順序関係$0\Rrightarrow\frac{p-1}{2}$，$p-1\Rrightarrow\frac{p-1}{2}$を有する正則３値論理関数と考えることができる．正則３値論理関数は向殿によって定義され，その性質が詳しく論じられている(4)．これに関して次のような事実が証明されている．

［補題１］(4)　３値関数$f_k^3(x)$:$\{0,\frac{p-1}{2},p-1\}^n\to\{0,\frac{p-1}{2},p-1\}^1$が次の関係を満足するとき，$f_k^3(x)$は３値変数，定数$0,\frac{p-1}{2},p-1$，及びｐ値ＡＮＤ，ＯＲ，ＮＯＴの結合で表現され，これを論理式表現されると言う．

(1)：$x\Rrightarrow y$なるすべてのxに対して$f_k^3(x)\Rrightarrow f_k^3(y)$

(2)：$x\Rrightarrow y(f_k^3(y)\in\{0,p-1\})$なるすべての$x$に対して$f_k^3(y)=f_k^3(x)$

但し，文献(4)では$0,\frac{p-1}{2},p-1$はそれぞれ0,1/2,1で，また論理演算子は３値のＡＮＤ，ＯＲ，ＮＯＴで記述してある．

ここで，次の定理を証明する．

［定理２］　C-単調な(3,p)-関数から導出された３値論理関数$f_k^3(x)$は，論理式で

表現される．

（証明）　(3,p)-関数f(x)に関し，次の記述を使用する．

$\{f^{-1}(i)\}$　　$f(x)=i$なる入力ベクトルの集合

$\{f^{-1}(\geqq i)\}$　$f(x)\geqq i$なる入力ベクトルの集合

$\{f^{-1}(\leqq i)\}$　$f(x)\leqq i$なる入力ベクトルの集合

(1)　$0<k<\frac{p-1}{2}$ の場合

$0<i\leqq k$なる任意のiを考える．任意のベクトル$A\in\{f^{-1}(i-1)\}$と$B\Rightarrow A$であるすべての入力ベクトルBは$\{f^{-1}(\leqq i-1)\}$内に存在する．このときすべてのベクトルBに対して$f_k{}^3(A)=f_k{}^3(B)=0$となる．従って$f_k{}^3(x)$は，補題１の条件(2)を満足する．だから$f_k{}^3(x)$は，論理式で表現される．

(2)　$k=\frac{p-1}{2}$ の場合

$p=2m$のときは$\{f^{-1}(\lfloor\frac{p-1}{2}\rceil)\}$と$\{f^{-1}(\leqq\lfloor\frac{p-1}{2}\rceil)\}$を考え(1)と同様に証明される．

$p=2m-1$のときは$\{f^{-1}(\frac{p-1}{2}-1)\}$と$\{f^{-1}(\leqq\frac{p-1}{2}-1)\}$を考え(1)と同様に証明される．

(3)　$\frac{p-1}{2}<k\leqq p-1$の場合

$k\leqq i\leqq p-1$なる任意のiを考える．任意のベクトル$A\in\{f^{-1}(i)\}$と$B\Rightarrow A$なるすべてのBは$\{f^{-1}(\geqq i)\}$内に存在する．このとき，すべてのベクトルBにたいして$f_k{}^3(A)=f_k{}^3(B)=p-1$となる．一方，$0<j<\frac{p-1}{2}$なる任意のjを考え，任意のベクトル$C\in\{f^{-1}(j)\}$と$D\Rightarrow C$なるすべてのDは$\{f^{-1}(\leqq j)\}$内に存在する．このとき，すべてのベクトルDにたいして$f_k{}^3(C)=f_k{}^3(D)=0$となる．

以上より，$f_k{}^3(x)$は，補題１の条件(2)を満足する．　　　　　　　　　　（証明終）

定理２では，C-単調な(3,p)-関数から導出された３値論理関数$f_k{}^3(x)(k=1,2,\cdots,\frac{p-1}{2},\cdots,p-1)$は，すべて論理式で表現されることを示した．$f_k{}^3(x)$は，その導出方

法より次の関係を満足している．

$f_1{}^3(x) \supseteq f_2{}^3(x) \supseteq \cdots \supseteq f_{\frac{p-1}{2}}{}^3(x)$，かつ$f_{\left[\frac{p-1}{2}\right]+1}{}^3(x) \supseteq f_{\left[\frac{p-1}{2}\right]+2}{}^3(x) \supseteq \cdots \supseteq f_{p-1}{}^3(x)$

次に，C-単調な(3,p)-関数の論理式決定法を考える．今，C-単調な(3,p)-関数から導出された３値論理関数$f_k{}^3(x)(k=1,2,\cdots,\frac{p-1}{2},\cdots,p-1)$の論理式を$L_k{}^3(x)(k=1,2,\cdots,\frac{p-1}{2},\cdots,p-1)$で与える．このとき，次の定理が成立する．

［定理３］　C-単調な(3,p)- 関数$f(x)$は，次の論理式$L^{(3,P)}(x)$で表現される．

$$L^{(3,P)}(x)=1L_1{}^3(x)\vee 2L_2{}^3(x)\vee\cdots\vee\frac{p-1}{2}L_{\frac{p-1}{2}}{}^3(x)\vee\cdots\vee(p-1)L_{p-1}{}^3(x)$$

但し，$L_1{}^3(x)\supseteq L_2{}^3(x)\supseteq\cdots\supseteq L_{\frac{p-1}{2}}{}^3(x)$かつ$L_{\left[\frac{p-1}{2}\right]+1}{}^3(x)\supseteq\cdots\supseteq L_{p-1}{}^3(x)$

（証明）　$f_k{}^3(x)$の導出の方法から

$$f_1{}^3(x)\supseteq f_2{}^3(x)\supseteq\cdots\supseteq f_{\frac{p-1}{2}}{}^3(x)\text{かつ}f_{\left[\frac{p-1}{2}\right]+1}{}^3(x)\supseteq\cdots\supseteq f_{p-1}{}^3(x)$$

が成り立つ．それゆえ，

$$L_1{}^3(x)\supseteq L_2{}^3(x)\supseteq\cdots\supseteq L_{\frac{p-1}{2}}{}^3(x)\text{かつ}L_{\left[\frac{p-1}{2}\right]+1}{}^3(x)\supseteq\cdots\supseteq L_{p-1}{}^3(x)$$

(1)　$0<q<\frac{p-1}{2}$なる真理値qを考える．

任意のベクトル$A\in\{f^{-1}(q)\}$に対しては，次の関係が成り立っている．

$$1L_1{}^3(A)\vee 2L_2{}^3(A)\vee\cdots\vee(q-1)L_{q-1}{}^3(A)\leqq q-1$$

$$qL_q{}^3(A)=q$$

$$(q+1)L_{q+1}{}^3(A)\vee\cdots\vee\frac{p-1}{2}L_{\frac{p-1}{2}}{}^3(A)\vee\cdots\vee(p-1)L_{p-1}{}^3(A)=0$$

従って，$L^{(3,P)}(A)=q$.

(2)　$q=\frac{p-1}{2}$のとき，任意のベクトル$A\in\{f^{-1}(\frac{p-1}{2})\}$に対し，

$$1L_1{}^3(A)\vee 2L_2{}^3(A)\vee\cdots\vee\left(\left[\frac{p-1}{2}\right]-1\right)L_{\left[\frac{p-1}{2}\right]-1}{}^3(A)<\frac{p-1}{2}$$

$\frac{p-1}{2} L_{\frac{p-1}{2}}{}^3(A)=\frac{p-1}{2}$

$(\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1)L_{\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1}{}^3(A)\vee\cdots\vee(p-1)L_{p-1}{}^3(A)=\frac{p-1}{2}$

従って，$L^{(3,P)}(A)=\frac{p-1}{2}$．

(3) $\frac{p-1}{2}<q\leqq p-1$のとき，任意のベクトル$A\in\{f^{-1}(q)\}$に対し，

$1L_1{}^3(A)\vee 2L_2{}^3(A)\vee\cdots\vee\frac{p-1}{2}L_{\frac{p-1}{2}}{}^3(A)\vee\cdots\vee(q-1)L_{q-1}{}^3(A)\leqq q-1$

$qL_q{}^3(A)=q$

$(q+1)L_{q+1}{}^3(A)\vee(q+2)L_{q+2}{}^3(A)\vee\cdots\vee(p-1)L_{p-1}{}^3(A)=\frac{p-1}{2}$

従って，$L^{(3,P)}(A)=q$．　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

4．論理式表現されるための必要十分条件とその論理式決定法

ここで，再び話を戻して，p値論理関数$F(X)$がすべての入力ベクトル$A_i(X_i)$に対して(1)式を満足する関数は，論理式表現できるか否かを議論する．初めに$p=2m-1$ $(m=2,3,\cdots)$の場合について議論する．

(1) $p=2m-1$の場合

この場合は，3値ベクトル集合 $\{x\mid x\in\{0,\frac{p-1}{2},p-1\}^n\}$ がp値ベクトル集合 $\{X\mid X\in\{0,1,\cdots,\frac{p-1}{2},\cdots,p-1\}^n\}$ の部分集合となっているため簡単に議論することができる．

［定理4］　すべての入力ベクトル$A_i(X_i)$に対して(1)式を満足するp値論理関数$F(X)$を考える．入力ベクトル$A(A\in\{0,\frac{p-1}{2},p-1\}^n)$に対する出力$F(A)$上の$(3,p)$-関数$f(x)$は，C-単調である．

（証明）　$f(x)$がすべての入力ベクトル$x \in \{0, \frac{p-1}{2}, p-1\}^n$に対して(1)式を満足しているのは明らか．よって，この定理を証明するには(1)式において$t \Rightarrow r$かつ$s \Rightarrow r$を満たしていることが言えれば十分である．

今，$s=F(A_i(0)), t=F(A_i(p-1)), r=F(A_i(\frac{p-1}{2}))$として，$F(A_i(X_i))=r(X_i\overline{X_i} \vee st) \vee tX_i \vee s\overline{X_i}$であるならば，

$$F(A_i(\tfrac{p-1}{2}))=\tfrac{p-1}{2}(r \vee s \vee t) \vee rst = r \qquad (5)$$

を満たしていなければならない．

（i）$t, s \geqq \frac{p-1}{2}$の場合

このとき，(5)式を満足するためには$r \geqq \frac{p-1}{2}$かつ$rst=r$でなければならない．よって$r \geqq \frac{p-1}{2}$かつ$r \leqq t, s$が導かれる．これは，$t \Rightarrow r$かつ$s \Rightarrow r$を満たしている．

（ii）　$t \geqq \frac{p-1}{2} \geqq s$の場合

このとき，(5)式は$\frac{p-1}{2}(r \vee t) \vee rs = r$となりこれを満足するためには$\frac{p-1}{2} \vee rs = r$でなければならない．よって$r=\frac{p-1}{2}$が導かれる．これは$t \Rightarrow r$かつ$s \Rightarrow r$を満たしている．

（iii）$t \leqq \frac{p-1}{2} \leqq s$の場合

このときは，（ii）の場合と同じ方法で証明できる．

（iv）　$t, s < \frac{p-1}{2}$の場合

このとき，(5)式を満足するためには$r < \frac{p-1}{2}$かつ$r \geqq t \vee s$でなければならない．これは$t \Rightarrow r$かつ$s \Rightarrow r$を満たしている．（証明終）

(2)　$p=2m$の場合

値数pが偶数値$2m$（$m=2,3,\cdots$）であるp値論理関数の場合には，値$\frac{p-1}{2}$は整数にならないので値$\frac{p-1}{2}$は真理値集合Ｖには存在しない．そのため$2m$値論理関数$F(X)$のＶ

に$\frac{p-1}{2}$を加えた真理値集合$V'=\{0,1,2,\cdots,\frac{p-1}{2},\cdots,p-1\}$を考え，写像：$V'^{n}\to V'^{1}$なる(2m+1)値論理関数$F'(X')$を生成する．この場合，$F'(X')(X'\in V'^{n})$を次に述べる生成規則によって生成する．

(2m+1)値論理関数F'(X')の生成規則

(2m+1)値入力ベクトル$A_i'(X_i')=(a_1,\cdots,a_{i-1},X_i,a_{i+1},\cdots,a_n)$とし，$(a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n)\in V'^{n-1}$はある値に固定する．(2m+1)値論理関数$F'(X')$のすべての出力値はすべての入力ベクトル$A_i(X_i)$対して(1)式を満足する2m値論理関数$F(X)$の出力値を使って次の手順で決定される．

手順0　入力ベクトル$X'=X\in V^{n}$に対するF'の出力値$F'(X')$は$F(X)$と等しいものとする．

手順1　手順0で得られた$F'(A_i'(0))=s$, $F'(A_i'(\frac{p-1}{2}))=r$, $F'(A_i'(p-1))=t$を(1)式に代入して$A_i(\frac{p-1}{2})$ $((a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n)\in V'^{n-1})$の出力$F'(A_i'(\frac{p-1}{2}))$を決定する．すべての$F'(A_i'(\frac{p-1}{2}))(1\leqq i\leqq n)$を得るためにすべてのiについてこれを行う．k=2として手順kに進む．

手順k$(2\leqq k\leqq n)$　$I_k=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$を$\{1,2,\cdots,n\}$の部分集合として任意の$i\in I_k$を選出する．$j\in I_k$ $(j\neq i)$に対しては，$a_j=\frac{p-1}{2}$であり，$j\notin I_k$に対しては$a_j\in V$であるようなベクトル$A_i'(\frac{p-1}{2})=(a_1,\cdots,a_{i-1},\frac{p-1}{2},a_{i+1},\cdots,a_n)$を考える．このとき，手順k-1で得られた$F'(A_i'(0))=s$, $F'(A_i'(\frac{p-1}{2}))=r$, $F'(A_i'(p-1))=t$の値から(1)式を使って$F(A_i'(\frac{p-1}{2}))$を決定する．これをすべての部分集合I_kに対して繰り返し行う．

$k\leftarrow k+1$とし，$k\neq n+1$のときは手順kを繰り返し，$k=n+1$のときは終了する．

この生成規則によって一つの2m値関数F(X)から(2m+1)値関数F'(X')を生成すると

き，手順kにおいてどのようにiを選択してもただ一つの(2m+1)値関数F'(X')しか生成されない．すなわち，次の定理が成り立つ．

［定理５］　すべてのp値ベクトル$A_i(X_i)$に対して(1)式が成り立つような2m値関数F(X)を考える．このときどのように生成規則を使ってもただ一つの(2m+1)値関数F'(X')しか生成されない．さらに生成されたF'(X')は，すべての(2m+1)値ベクトル$A_i'(X_i')$に対して(1)式が成立する．

（証明）　入力ベクトル$X'=X\in V^n$に対する出力値F'(X')は(1)式を満たす．よって入力ベクトル$B\in\{X'|X'\in V'^n$かつ$X'\notin V^n\}$に対する出力値F(B)について言えば十分である．この定理を証明するには$F'(A_{ij}(0,\frac{p-1}{2}))$,$F'(A_{ij}(p-1,\frac{p-1}{2}))$,$F'(A_{ij}([\frac{p-1}{2}],\frac{p-1}{2}))$から得られる$F'(A_{ij}(X_i',\frac{p-1}{2}))$と$F'(A_{ij}(X_i',0))$,$F'(A_{ij}(X_i',[\frac{p-1}{2}]))$,$F'(A_{ij}(X_i',p-1))$から(1)式を使って得られる$F'(A_{ij}(X_i',X_j'))$に$X_j'=\frac{p-1}{2}$を代入して得た$F'(A_{ij}(X_i',\frac{p-1}{2}))$が等しいことと，$F'(A_{ij}(\frac{p-1}{2},0))$,$F'(A_{ij}(\frac{p-1}{2},[\frac{p-1}{2}]))$,$F'(A_{ij}(\frac{p-1}{2},p-1))$から得られる$F'(A_{ij}(\frac{p-1}{2},X_j'))$と$F'(A_{ij}(0,X_j'))$ $F'(A_{ij}([\frac{p-1}{2}],X_j'))$,$F'(A_{ij}(p-1,X_j'))$から(1)式を使って得られる$F'(A_{ij}(X_i',X_j'))$に$X_i'=\frac{p-1}{2}$を代入して得られる$F'(A_{ij}(\frac{p-1}{2},X_j'))$が等しいことを証明すればよい．ただし，(2m+1)値ベクトル$A_{ij}(X_i',X_j')=(a_1,\cdots,a_{i-1},X_i',a_{i+1},\cdots,a_{j-1},X_j',a_{j+1},\cdots,a_n)$とし，$(a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_{j-1},a_{j+1},\cdots,a_n)\in V'^{n-2}$はある値に固定している．

いま，$F'(A_{ij}(0,0))=a$,$F'(A_{ij}(0,p-1))=b$,$F'(A_{ij}(p-1,0))=c$,$F'(A_{ij}(p-1,p-1))=d$,$F'(A_{ij}(0,[\frac{p-1}{2}]))=e_1$，$F'(A_{ij}([\frac{p-1}{2}],0))=e_2$，$F'(A_{ij}([\frac{p-1}{2}],p-1))=e_3$，$F'(A_{ij}(p-1,[\frac{p-1}{2}]))=e_4$，$F'(A_{ij}([\frac{p-1}{2}],[\frac{p-1}{2}]))=f$とする．

$$F'(A_{ij}(0,X_j'))=e_1(X_j'\overline{X}_j'\vee ab)\vee bX_j'\vee a\overline{X}_j' \qquad (6)$$

$$F'(A_{ij}([\tfrac{p-1}{2}],X_j'))=f(X_j'\overline{X}_j'\vee e_2e_3)\vee e_3X_j'\vee e_2\overline{X}_j' \qquad (7)$$

$$F'(A_{ij}(p-1,X_j'))=e_4(X_j'\overline{X}_j'\vee cd)\vee dX_j'\vee c\overline{X}_j' \qquad (8)$$

(6), (7), (8)式より$F'(A_{ij}(0,\frac{p-1}{2}))$,$F'(A_{ij}(p-1,\frac{p-1}{2}))$,$F'(A_{ij}([\frac{p-1}{2}],\frac{p-1}{2}))$は,

$$F'(A_{ij}(0,\tfrac{p-1}{2}))=(e_1\vee a\vee b)^{\frac{p-1}{2}}\vee abe_1$$

$$F'(A_{ij}(p-1,\tfrac{p-1}{2}))=(e_4\vee c\vee d)^{\frac{p-1}{2}}\vee cde_4$$

$$F'(A_{ij}([\tfrac{p-1}{2}],\tfrac{p-1}{2}))=(f\vee e_2\vee e_3)^{\frac{p-1}{2}}\vee e_2e_3f$$

上式より(1)式を使って$F'(A_{ij}(X_i',\frac{p-1}{2}))$がつぎのように得られる.

$$F'(A_{ij}(X_i',\tfrac{p-1}{2}))=\{(f\vee e_2\vee e_3)^{\frac{p-1}{2}}\vee fe_2e_3\}〔X_i'\overline{X}_i'\vee\{(e_1\vee a\vee b)^{\frac{p-1}{2}}\vee abe_1\}\{(e_4\vee c\vee d)^{\frac{p-1}{2}}\vee cde_4\}〕\vee\{(e_4\vee c\vee d)^{\frac{p-1}{2}}\vee cde_4\}X_i'\vee\{(e_1\vee a\vee b)^{\frac{p-1}{2}}\vee abe_1\}\overline{X}_i' \qquad (9)$$

一方, $F'(A_{ij}(X_i',X_j'))$は$F'(A_{ij}(X_i',0))$,$F'(A_{ij}(X_i',[\frac{p-1}{2}]))$及び,$F'(A_{ij}(X_i',p-1))$から

(1)式を使って次のように得られる.

$$F'(A_{ij}(X_i',X_j'))=\{f(X_i'\overline{X}_i'\vee e_1e_4)\vee e_4X_i'\vee e_1\overline{X}_i'\}〔X_j'\overline{X}_j'\vee\{e_2(X_i'\overline{X}_i'\vee ac)\vee cX_i'\vee a\overline{X}_i'\}\{e_3(X_i'\overline{X}_i'\vee bd)\vee dX_i'\vee b\overline{X}_i'\}〕\vee\{e_3(X_i'\overline{X}_i'\vee bd)\vee dX_i'\vee b\overline{X}_i'\}X_j'\vee\{e_2(X_i'\overline{X}_i'\vee ac)\vee cX_i'\vee a\overline{X}_i'\}\overline{X}_j'$$

$X_j'=\frac{p-1}{2}$を代入して, $F'(A_{ij}(X_i',\frac{p-1}{2}))$は次のようになる.

$$F'(A_{ij}(X_i',\tfrac{p-1}{2}))=\{f(X_i'\overline{X}_i'\vee e_1e_4)\vee e_4X_i'\vee e_1\overline{X}_i'\}〔\tfrac{p-1}{2}\vee\{e_2(X_i'\overline{X}_i'\vee ac)\vee cX_i'\vee a\overline{X}_i'\}\{e_3(X_i'\overline{X}_i'\vee bd)\vee dX_i'\vee b\overline{X}_i'\}〕\vee\{e_3(X_i'\overline{X}_i'\vee bd)\vee dX_i'\vee b\overline{X}_i'\}^{\frac{p-1}{2}}\vee\{e_2(X_i'\overline{X}_i'\vee ac)\vee cX_i'\vee a\overline{X}_i'\}^{\frac{p-1}{2}} \qquad (10)$$

ここで(9)式と(10)式が等しいことを次のように変数X_i',$\overline{X}_i'$,$X_i'\overline{X}_i'$の係数及び定数

が等しいことを示すことによって証明する.

(9)式のX_i'の係数$=(e_4 \vee c \vee d)^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \vee cde_4$

(10)式のX_i'の係数$=(e_4 \vee c \vee d)^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \vee abcde_2e_3e_4 \vee acde_2e_4 \vee bcde_3e_4 \vee cde_4 \vee$

$acde_1e_2e_4 \vee bcde_1e_3e_4 \vee cdfe_1e_4 = (e_4 \vee c \vee d)^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \vee cde_4$

よって,(9)式のX_i'の係数$=$(10)式のX_i'の係数.

(9)式の$\overline{X}_i$'の係数$=(e_1 \vee a \vee b)^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \vee abe_1$

(10)式の$\overline{X}_i$'の係数$=(e_1 \vee a \vee b)^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \vee abcde_1e_2e_3 \vee abce_1e_2e_4f \vee abde_1e_3e_4f \vee$

$abe_1e_4f \vee abce_1e_2 \vee abde_1e_3 \vee abe_1 = (e_1 \vee a \vee b)^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \vee abe_1$

よって,(9)式の$\overline{X}_i$'の係数$=$(10)式の$\overline{X}_i$'.

(9)式の$X_i'\overline{X}_i'$の係数$=(f \vee e_2 \vee e_3)^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \vee fe_2e_3$ (11)

(10)式の $X_i'\overline{X}_i'$の係数$=(f \vee e_2 \vee e_3)^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \vee (f \vee e_4 \vee e_1)(e_3 \vee d \vee b)(e_2 \vee a \vee c)$

(12)

$f \vee e_2 \vee e_3 \geqq \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$のときは,$X_i'\overline{X}_i' \subseteq \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$が常に成り立っているので,(11)式$X_i'\overline{X}_i'=$(12)式$X_i'\overline{X}_i'=X_i'\overline{X}_i'\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$.

いま,$r=F'(A_i(\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor)), s=F'(A_i(0)), t=F'(A_i(p-1))$としたとき,$F'(A_i(X_i'))=r(X_i'\overline{X}_i' \vee st) \vee tX_i' \vee s\overline{X}_i'$を満たすような$r,s,t$を考える.定理4の証明と同じ方法で次の関係を得ることができる.

$t,s \geqq \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor+1 \longrightarrow r \geqq \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$かつ$r \leqq st$ (13)

$t > \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor \geqq s \longrightarrow r = \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$ (14)

$t \leqq \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor < s \longrightarrow r = \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor+1$ (15)

$t,s \leqq \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor \longrightarrow r \leqq \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$かつ$r \geqq s \vee t$ (16)

よって$f \vee e_2 \vee e_3 < \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$のときは,(16)式より$f \geqq e_1 \vee e_4$, $e_3 \geqq b \vee d$かつ$e_2 \geqq a \vee c$

なる関係を満たしている．よって(11)式＝(12)式＝$(f \vee e_2 \vee e_3)\frac{p-1}{2} \vee fe_2e_3$が成り立つ．

(9)式の定数項＝$\frac{p-1}{2}(f \vee e_2 \vee e_3)(e_1 \vee a \vee b)(e_4 \vee c \vee d) \vee abcde_1e_2e_3e_4f$　(17)

(10)式の定数項＝$\frac{p-1}{2}(fe_1e_4 \vee e_2ac \vee e_3bd) \vee abcde_1e_2e_3e_4f$　(18)

定数項においては，まずa,b,c,dの値の取り方を次の６つに分類する．① $a,b,c,d \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$の場合，② $a,b,c,d \leqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$の場合，③ $a \leqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$かつ$b,c,d \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$，$b \leqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$かつ$a,c,d \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$，$c \leqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$かつ$a,b,d \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$，$d \leqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$かつ$a,b,c \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$の場合，④ $a \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$かつ$b,c,d \leqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$，$b \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$かつ$a,c,d \leqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$，$c \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$かつ$a,b,d \leqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$，$d \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$かつ$a,b,c \leqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$の場合，⑤ $a,b \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$かつ$c,d \leqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$，$b,d \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$かつ$c,a \leqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$，$c,d \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$かつ$b,a \leqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$，$c,a \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$かつ$b,d \leqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$の場合，⑥ $a,d \leqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$かつ$b,c \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$，$a,d \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$かつ$b,c \leqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$の場合である．

たとえば，① $a,b,c,d \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$の場合，(13)式から，$a,b \geqq e_1 \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$，$e_2,e_3 \geqq f \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$，$c,d \geqq e_4 \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$，$a,c \geqq e_2 \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$，$e_1,e_4 \geqq f \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$，$b,d \geqq e_3 \geqq \lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor+1$という関係になる．このとき，(17)式＝$\frac{p-1}{2}(e_2 \vee e_3)(a \vee b)(c \vee d) \vee f = f$．(18)式＝$\frac{p-1}{2}(f \vee e_2 \vee e_3) \vee f = f$．よって(17)式＝(18)式．①の場合と同様に②～⑤の場合についても(17)式＝(18)式がつねに成り立つことは検索済みである．よって①～⑤の場合には，(9)式，(10)式におけるX_i'，$\overline{X_i}'$，$X_i'\overline{X_i}'$の係数及び定数項はお互いに等しい値をとり，(9)式＝(10)式が成り立つ．また，⑥の場合には，(18)＜(17)＝$\frac{p-1}{2}$となる．このとき(9)式，(10)式ともX_i'，$\overline{X_i}'$，$X_i'\overline{X_i}'$の係数はそれぞれ，$\frac{p-1}{2}$，$\frac{p-1}{2}$，$\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$となり(17),(18)式は他の項に吸収されてしまう．よって，結局⑥の場合においても(9)式＝(10)式が成り立つ．

一方，$F'(A_ij(\frac{p-1}{2},0))$,$F'(A_ij(\frac{p-1}{2},\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor))$および$F'(A_ij(\frac{p-1}{2},p-1))$から得た

$F'(A_{ij}(\frac{p-1}{2}, X_j'))$と$F'(A_{ij}(0,X_j'))$, $F'(A_{ij}(\frac{p-1}{2},X_j'))$および$F'(A_{ij}((p-1, X_j'))$から得られた$F'(A_{ij}(\frac{p-1}{2},X_j'))$が等しいことも同様に証明できる．（証明終）

定理５は2m値論理関数$F(X)$から得られた$(2m+1)$値論理関数$F'(X')$もまたすべての$(2m+1)$値入力ベクトル$A_i'(X_i')$に対して(1)式を満たすことを保証している．従って，$p=2m$と$p=2m-1$の両方に対して同じように$(3,p)$-関数：$\{0,\frac{p-1}{2},p-1\}^n \to \{0,1,\cdots,\frac{p-1}{2},\cdots,p-1\}^1$を考えることができる．さらに，定理２から$p=2m$，$p=2m-1$のどちらの場合も$(3,p)$-関数は，C-単調である．

次に論理式表現される関数の論理式決定法を述べる．すべてのp値入力ベクトル$A_i(X_i)$に対して(1)式が成り立つようなp値論理関数$F(X)$を考える．いま，入力ベクトル$A \in \{0,\frac{p-1}{2},p-1\}^n$に対する出力値$F(A)$より得られた$(3,p)$-関数$f(x)$の論理式を$L^{(3,P)}(x)$とする．この$L^{(3,P)}(x)$の３値変数$x_i$, $\bar{x}_i$をそれぞれp値変数X_i, $\bar{X}_i$に変換したp値論理式を$L^P(X)$とする．

［定理６］　すべてのp値ベクトル$A_i(X_i)$に対して(1)式を満足するようなp値論理関数$F(X)$（または$F'(X')$）は$L^P(X)$で完全に表現できる．

（証明）　論理式$L^P(X)$はp値ＡＮＤ，ＯＲ，ＮＯＴ，定数$0,1,\cdots,p-1$及び変数X_iから構成されている．よってL^Pは定理１を満たしている．

（i）　$p=2m-1(m=2,3,\cdots)$のとき

入力ベクトル$A \in \{0,\frac{p-1}{2},p-1\}^n$に対して$L^P(A)=F(A)$が成り立つ．一方，(1)式は，s,t,rの値によって$F(A_i(X_i))(X_i \notin \{0,\frac{p-1}{2},p-1\})$の値がただ１つ定まることから$L^P$は$F(X)$を完全に表現できる．

(ii)　$p=2m(m=2,3,\cdots)$のとき

入力ベクトル$A\in\{0,\lceil\frac{p-1}{2}\rceil,p-1\}^n$に対して$L^p(A)=F'(A)$が成り立つ．よって$p=2\times m-1$のときと同様に$L^p$は$F'(X')$を完全に表現する．$F(X)$は$F'(X')$の部分関数なので$L^p$は$F(X)$を完全に表現している．　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

定理６は論理式$L^p(X)$が$F(X)$(または$F'(X')$)を完全に表現することを示している．$p=2m$の場合，与えられたp値論理関数$F(X)$から$F'(X')$が生成され，その論理式$L^p(X)$に定数$\lceil\frac{p-1}{2}\rceil$が存在する．しかし，$F(X)$は値$\lceil\frac{p-1}{2}\rceil$を決して出力することはない．よって，$\lceil\frac{p-1}{2}\rceil$を$\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$に変換した論理式によって$F(X)$を完全に表現することができる．以上により，すべてのp値ベクトル$A_i(X_i)$に対して(1)式を満足するp値論理関数$F(X)$は論理式表現でき，かつその論理式はL^pで表現できることがわかる．

これで定理１の逆が言えたことになり結局，<u>p値論理関数$F(X)$が論理式表現されるための必要十分条件は，p値論理関数$F(X)$がすべての入力ベクトル$A_i(X_i)$に対して(1)式を満足することであり，その$F(X)$の論理式L^pは$F(x)$の(3,p)－関数の論理式$L^{(3,P)}$内の３値変数$x_i,\overline{x_i}$をそれぞれp値変数$X_i,\overline{X_i}$に変換し，さらに$p=2m$の場合には，L^p内の$\lceil\frac{p-1}{2}\rceil$を$\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor$に変換することによって得られる．</u>

［例１］　表１に示す３変数５値論理関数$F(X)$を考える．$F(X)$はすべての入力ベクトル$A_i(X_i)$に対して(1)式を満たしている．表２はその(3,5)-関数$f(x)$である．表２から分離した$f_1{}^3(x)$，$f_2{}^3(x)$，$f_3{}^3(x)$，$f_4{}^3(x)$をそれぞれ表３，４，５，６に示す．このとき論理式$L_1{}^3(x)$，$L_2{}^3(x)$，$L_3{}^3(x)$，$L_4{}^3(x)$は，

$L_1{}^3(x)=2(\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3})$，$L_2{}^3(x)=2(x_1\vee x_2\vee x_3)(\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3})(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3})$

$L_3{}^3(x)=\overline{x_1}x_3\vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee x_1x_2\overline{x_3}\vee 2(x_1\vee x_2\vee x_3)(\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3})(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3})$

$L_4{}^3(x)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee 2(x_1\vee x_2\vee x_3)(\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3})(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3})$

と表される．よって，$L^{(3,5)}(x)$は，

$L^{(3,5)}(x)=1L_1{}^3(x)\vee 2L_2{}^3(x)\vee 3L_3{}^3(x)\vee 4L_4{}^3(x)=1(\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3})\vee 2(x_1\vee x_2\vee$ $x_3)(\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3})(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3})\vee 3(\overline{x_1}x_3\vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee x_1x_2\overline{x_3})\vee 4(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3})$

となり，結局，５値論理関数F(X)は次の$L^5(X)$で完全に表現される．

$L^5(X)=1(\overline{X_1}\vee X_2\vee\overline{X_3})\vee 2(X_1\vee X_2\vee X_3)(\overline{X_1}\vee X_2\vee\overline{X_3})(\overline{X_1}\vee\overline{X_2}\vee\overline{X_3})\vee 3(\overline{X_1}X_3\vee$ $X_1\overline{X_2}\,\overline{X_3}\vee X_1X_2\overline{X_3})\vee 4(\overline{X_1}\,\overline{X_2}X_3\vee X_1\overline{X_2}\,\overline{X_3})$

５．むすび

本文は，与えられたｐ値論理関数が，論理式表現可能か否かを判定する方法を与え，更に，その論理式決定法を明らかにした．ここで示された論理式決定法は，3^n個の入力ベクトル$A\in\{0,\frac{p-1}{2},p-1\}^n$のみを用いるので，簡単に論理式が決定できる．一方，ここで示された事実は，C-単調な(3,P)-関数f(x)が，論理式表現されるp値論理関数と１対１対応をなすことを含んでいる．従って，このことは，論理式表現される論理関数の数え上げ問題等にも有効となろう．

表1．5値論理関数F(X)

X_1	X_2 \ X_3	0	1	2	3	4
0	0	1	1	2	3	4
0	1	1	1	2	3	3
0	2	2	2	2	3	3
0	3	2	2	2	3	3
0	4	2	2	2	3	3
1	0	1	1	2	3	3
1	1	1	1	2	3	3
1	2	2	2	2	3	3
1	3	2	2	2	3	3
1	4	2	2	2	3	3
2	0	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2
2	3	2	2	2	2	2
2	4	2	2	2	2	2
3	0	3	3	2	1	1
3	1	3	3	2	1	1
3	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	1	1
3	4	3	3	2	1	1
4	0	4	3	2	1	0
4	1	3	3	2	1	1
4	2	2	2	2	2	2
4	3	3	3	2	1	1
4	4	3	3	2	1	1

表2．(3,5)-関数f(x)

x_1	x_2 \ x_3	0	2	4
0	0	1	2	4
0	2	2	2	3
0	4	2	2	3
2	0	2	2	2
2	2	2	2	2
2	4	2	2	2
4	0	4	2	0
4	2	2	2	2
4	4	3	2	1

表3．$f_1{}^3(x)$

x_1	x_2 \ x_3	0	2	4
0	0	2	2	2
0	2	2	2	3
0	4	2	2	2
2	0	2	2	2
2	2	2	2	2
2	4	2	2	2
4	0	2	2	0
4	2	2	2	2
4	4	2	2	2

表4．$f_2{}^3(x)$

x_1	x_2 \ x_3	0	2	4
0	0	0	2	2
0	2	2	2	2
0	4	2	2	2
2	0	2	2	2
2	2	2	2	2
2	4	2	2	2
4	0	2	2	0
4	2	2	2	2
4	4	2	2	0

表5．$f_3{}^3(x)$

x_1	x_2 \ x_3	0	2	4
0	0	0	2	4
0	2	2	2	4
0	4	2	2	4
2	0	2	2	2
2	2	2	2	2
2	4	2	2	2
4	0	4	2	0
4	2	2	2	2
4	4	4	2	0

表6．$f_4{}^3(x)$

x_1	x_2 \ x_3	0	2	4
0	0	0	2	4
0	2	2	2	2
0	4	2	2	2
2	0	2	2	2
2	2	2	2	2
2	4	2	2	2
4	0	4	2	0
4	2	2	2	2
4	4	2	2	0

謝辞　本研究を進めるに当たって貴重な資料[(4)-(8)]と有益な御助言を戴いた向殿政男教授（明治大学）に感謝の意を表します．

参考文献

(1) 畑，中島，大和，北橋：”２値入力ｐ値出力関数から生成されるｐ値論理関数とその論理式決定”信学論（Ｄ），J71-D, 12,pp.2517-2526(1988)

(2) 山本，藤田：”２値しきい値関数と同じ論理式で表される多値多数決関数”信学論（Ｄ），J64-D,2,pp.172-173(1981)

(3) 中島，畑，大和：”多値論理関数が正関数であるための必要十分条件”信学論（Ｄ），J69-D, 3,pp.488-490 (1986)

(4) M.Mukaidono :”Regular ternary logic functions --Ternary logic functions suitable for treating ambiguity--” IEEE Trans. Comput. Vol.C-35, pp.179-183,(1986) ; available in Proc. 13th-ISMVL, pp.286-291 (1983)

(5) M.Mukaidono :” A set of independent and complete axioms for fuzzy algebra(kleene algebra)”,Proc. 11th-ISMVL, pp.27-34 (1981).

(6) M.Mukaidono :”Some kinds of functional completeness of ternary logic functions”, Proc. 10th-ISMVL, pp.81-87 (1980).

(7) J.Berman, M.Mukaidono :”Enumerating fuzzy switching functions and free kleene algebras”,Comp. & Maths. with Appls.10,1,pp.25-35,(1984)

(8) S.C.Kleene:”Introduction to metamathematics”,North-Holland Publishing Amsterdam, pp.332-340 (1952).